EPFL Automne 2024

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Correction série 2

Exercice 1. On considere l'application

$$f : x \in \mathbb{R}_{\geqslant -2} \mapsto x^3 - x \in \mathbb{R}.$$

1. Que vaut $f_*([-2,+\infty[)$? Que vaut $f_*([0,+\infty[)$?
2. Que vaut $f^{(-1)}([0,+\infty[)$? Que vaut $f^{(-1)}([-2,+\infty[)$?
3. Cette application est elle injective ?
4. Cette application est elle surjective ?
5. Comment modifier l'espace d'arrivee pour la rendre surjective ?
6. Trouver x_0 le plus petit possible pour cette application, avec l'espace de depart $\mathbb{R}_{\geqslant x_0}$ soit injective.

Solution. Tout d'abord quelques rappels d'analyse réelle :

— Si une fonction dérivable admet une dérivée positive (resp. strictement positive) sur un intervalle de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors cette fonction est croissante (resp. strictement croissante) sur cet intervalle.

— Si une fonction dérivable admet une dérivée négative (resp. strictement négative) sur un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ alors cette fonction est décroissante (resp. strictement décroissante) sur cet intervalle.

— Les extrema d'une fonction définie et dérivable sur intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les images des points du bords de cet intervalle ou des points stationnaires (de dérivée nulle).

— *(Théorème des valeurs intermédiaires)* : Soit f définie et continue sur I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, alors pour tout $y \in]m, M[$, où $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$ il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. En particulier, $f(I) \supset]m, M[$.

— Une fonction strictement croissante est injective.

1) Démontrons que $f([-2,+\infty[) = [-6,+\infty[$. On procèdera par double inclusion. On s'appuiera sur le tableau de variation de f :

x	-2	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	0	$\frac{-1+\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{3}$	0	$+\infty$

Étant donné que -6 est inférieur à $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$ on a bien $f([-2,+\infty[) \subset [-6,+\infty[$.
D'autre part, f est continue avec :

$$-6 = \inf\{f(x) : x \in [-2,+\infty[\} \text{ et } +\infty = \sup\{f(x) : x \in [-2,+\infty[\}.$$

Donc pour tout $y \in [-6,+\infty[$, il existe $x \in [-2,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. C'est à dire $[-6,+\infty[\subset f([-2,+\infty[)$.
On conclut que $f([-2,+\infty[) = [-6,+\infty[$.

Un raisonnement similaire donne $f([0,+\infty[) = [\frac{1-\sqrt{3}}{3},+\infty[$.

2) À l'aide du tableau de variation on observe que $f^{-1}([0,+\infty[) = [-1,0] \cup [1,+\infty[$.
Pour $f^{-1}([-2,+\infty[)$, le tableau de variation nous indique qu'il existe $\alpha \in]-2,-1[$ tel que $f(\alpha) = -2$. En particulier, comme la fonction est strictement croissante sur cet interval, c'est l'unique preimage de -2 sur cet intervalle. Ainsi, $f^{-1}([-2,+\infty[) = [\alpha,+\infty[$.

Remarque : La polynôme $x^3 - x + 2$ n'admet pas de racine évidente, par conséquent trouver la valeur exact de α (qui n'est pas rationel) requiert des méthodes de calcul que vous n'êtes pas sensé connaitre à priori.

3) On rappelle qu'une application $g : A \to B$ est injective si et seulement si :

$$\forall x, y \in A : (x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y)).$$

Or ici 1 et 0 ont la même image donc f n'est pas injective.

4) On rappelle qu'une application $g : A \to B$ est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in B \exists x \in A : g(x) = y.$$

Or ici on sait que $f([-2,+\infty[) = [-6,+\infty[$. en particulier $-7 \notin f([-2,+\infty[)$ mais $-7 \in \mathbb{R}$ donc $f : [-2,+\infty[\to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

5) Une application est évidement surjective dans son image par définition de l'image, il suffit donc de restreindre $\mathbb{R}$ à l'image de f. Ainsi, la fonction $h : [-2, +\infty[\to f([-2, +\infty[)$ définit pour tout $x \in [-2, +\infty[$ par $h(x) = f(x)$ est surjective.

6) On sait que sur $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ l'application f est strictement croissante donc injective. Ainsi on peut déduis que $x_0 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Maintenant, on doit prouver que $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est effectivement la plus petite valeur possible. On procède par l'absurde.
Supposons que $x_0 < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ainsi f est injective sur $[x_0, +\infty[$. On peut supposer que $x_0 > 0$, car on a déjà vu que f n'est pas injective sur $[0, +\infty[$. Notons $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pour plus de simplicité. La fonction f admet les deux propriétés suivante :

- Sur l'intervalle $[x_0, m]$ f est strictement décroissante.
- Sur l'intervalle $[m, 1]$ f est strictement croissante.

Par le théorème des valeurs intermédiaires :

- la fonction $g : [x_0, m] \to \mathbb{R}$, définie comme la restriction de f à $[x_0, m]$ atteint toute valeurs de $[f(m), f(x_0)]$,
- la fonction $h : [m, 1] \to \mathbb{R}$, définie comme la la restriction de f à $[m, 1]$ atteint toute valeurs de $[f(m), 0]$.

Observons que si l'on pose $y = \frac{f(x_0)}{2}$ alors $y \in]f(m), 0[\cap]f(m), f(x_0)[$, on a donc l'existence de :

- un point $x_g \in]x_0, m[$ tel que $y = g(x_g) = f(x_g)$,
- un point $x_h \in]m, 1[$ tel que $y = g(x_h) = f(x_h)$.

Ainsi $f(x_g) = f(x_h) = y$ avec $x_g \neq x_h$ et $x_g, x_h \in [x_0, +\infty[$ ce qui contredit l'injectivité de f sur $[x_0, +\infty[$. Donc $x_0 = m$.

Exercice 2. Soient X, Y, Z des ensembles (pas forcement finis) et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications entre les ensembles X et Y et les ensembles Y et Z et $g \circ f : X \to Z$ l'application composee.

On verra la semaine prochaine que si f et g sont injectives (resp. surjectives,) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective) [1].

On va examiner des reciproques de ces faits.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Donner un exemple montrant que f n'est pas forcement surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Donner un exemple montrant que ψ n'est pas forcement injective.

Solution.

1. En particulier si f et g sont bijective alors $g \circ f$ est bijective.

1. Soit $z \in Z$ un élément arbitraire. On montre qu'il existe un élément $y \in Y$ tel que $f(y) = z$.
   Comme $g \circ f$ est surjective, il existe un élément $x \in X$ tel que $g \circ f(x) = z$. Ainsi, si on prend l'élément $y := f(x)$, alors $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$. Comme z est arbitraire, on conclut que g est surjective.

   Comme contre-exemple, on peut considerer les ensembles $X = Y = \{a, b, c\}$ et $Z = \{a, b\}$ et definir les fonctions suivantes :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
a \arrow[r, mapsto] & a \arrow[r, mapsto] & a \\
b \arrow[ur, mapsto] & b \arrow[r, mapsto] & b \\
c \arrow[r, mapsto] & c \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

2. Soient $x, x' \in X$ deux éléments arbitraires. Nous avons

$$\begin{aligned}
& f(x) = f(x') \\
\implies & g(f(x)) = g(f(x')) \\
\iff & g \circ f(x) = g \circ f(x') \\
& \iff x = x' \text{ par injectivité de } g \circ f.
\end{aligned}$$

   Par conséquent f est injective.

   Comme contre-exemple, on peut prendre les ensembles $X = Z = \{a, b\}$ et $Y = \{a, b, c\}$ et définir les fonctions suivantes.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
a \arrow[r, mapsto] & a \arrow[r, mapsto] & a \\
b \arrow[r, mapsto] & b \arrow[r, mapsto] & b \\
 & c \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Exercice 3. Soit $f : X \mapsto Y$ une application entre ensembles. Pour $A \subset X$ un sous-ensemble, on notera pour simplifier l'image de A par X par $f(A) \subset Y$ (au lieu de $f_*(A)$).

1. Que vaut $f(\emptyset)$?
2. Montrer que pour tout sous-ensembles $A, B \subset X$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$
3. (a) Montrer que pour tout $A, B \subset X$ des sous-ensembles, on a
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B);$$
   (b) Donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
   (c) Montrer que si f est injective on a
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$
4. Montrer que pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$, on a
$$f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D).$$
5. Montrer que pour tout pour tout sous-ensembles $C, D \subset Y$, on a
$$f^{(-1)}(C \cap D) = f^{(-1)}(C) \cap f^{(-1)}(D).$$
6. Montrer que
$$f \text{ est injective } \iff \forall A \subset X,\ f^{(-1)}(f(A)) = A.$$
7. Montrer que
$$f \text{ est surjective } \iff \forall C \subset Y,\ f(f^{(-1)}(C)) = C.$$

Solution.

1. Par définition,
$$f(\emptyset) := \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset.$$
2. Nous avons la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B \text{ tel que } f(x) = y \\
&\iff \exists x \in A \text{ ou } x \in B \text{ tel que } f(x) = y \\
&\iff f(x) \in f(A) \text{ ou } f(x) \in f(B) \text{ et } f(x) = y \\
&\iff y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\
&\iff y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

3. (a) Comme $A \cap B \subset A$, $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même on a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Ainsi $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (b) Par exemple, prenons la fonction constante $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie tout élément $x \in \mathbb{R}$ vers 1. Considérons les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

   Alors,

$$c(A \cap B) = c(\emptyset) = \emptyset \text{ et } c(A) \cap c(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}.$$

   (c) On procède par double inclusion. Par la question 3.(a), nous avons déjà l'inclusion $\subset$. Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe un $x \in A$ tel que $f(x) = y$ et il existe un $x' \in B$ tel que $f(x') = y$. Ainsi $f(x) = y = f(x')$. Mais par injectivité de f, $x = x'$. Ainsi $x = x' \in A \cap B$ et on conclut que $y = f(x) \in f(A \cap B)$.
4. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in f^{(-1)}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \\ &\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{(-1)}(C) \text{ ou } x \in f^{(-1)}(D) \\ &\iff x \in f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D). \end{aligned}$$

5. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in f^{(-1)}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \\ &\iff f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{(-1)}(C) \text{ et } x \in f^{(-1)}(D) \\ &\iff x \in f^{(-1)}(C) \cap f^{(-1)}(D). \end{aligned}$$

6. On montre que

$$f \text{ est injective } \iff \forall A \subset X,\ f^{(-1)}(f(A)) = A.$$

   $(\Rightarrow)$: On suppose f injective. Soit $A \subset X$, on va montrer que $f^{(-1)}(f(A)) = A$ par double inclusion.
   Si $x \in f^{(-1)}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe $y \in A$ avec $f(x) = f(y)$. Comme f est injective, $x = y \in A$ et donc $f^{(-1)}(f(A)) \subset A$.
   Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, et donc $x \in f^{(-1)}(f(A))$. On vient de montrer que $A \subset f^{(-1)}(f(A))$ (Notez que cette inclusion est vraie en générale).
   $(\Leftarrow)$: Soit $x_1, x_2 \in X$ avec $f(x_1) = f(x_2) =: p$. Alors on a

$$\{x_1\} = f^{(-1)}(f(\{x_1\})) = f^{(-1)}(\{p\}) = f^{(-1)}(f(\{x_2\})) = \{x_2\},$$

   ce qui implique $x_1 = x_2$, et donc que f est injective.

7. On montre que

$$f \text{ est surjective } \iff \forall C \subset Y,\ f(f^{(-1)}(C)) = C.$$

$(\Rightarrow)$: On suppose f surjective. Soit $C \subset Y$, on va montrer que $f(f^{(-1)}(C)) = C$ par double inclusion.
Si $y \in f(f^{(-1)}(C))$, alors il doit exister $x \in f^{(-1)}(C)$ avec $f(x) = y$. Comme x est dans la préimage par f de C, son image doit appartenir à C, donc $y \in C$. (Notez que cette inclusion est vraie en générale).
Maintenant si $y \in C$, par surjectivité de f, il existe au moins un $x \in X$ avec $f(x) = y$. Comme $f(x) \in C$, on a que $x \in f^{(-1)}(C)$, et donc $y = f(x) \in f(f^{(-1)}(C))$.

$(\Leftarrow)$: Soit $y \in Y$, on doit exhiber $x \in X$ tel que $f(x) = y$. En d'autres termes, on doit montrer que $f^{(-1)}(\{y\})$ est non vide.
On rappelle que par définition, une application ensembliste $g : X \to Y$ satisfait que $g(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$ pour n'importe quel $A \subset X$.
Puisque $f(f^{(-1)}(\{y\})) = \{y\} \neq \emptyset$, on a forcément que $f^{(-1)}(\{y\})$ est non vide, et donc f est surjective.

Exercice 4. ("Cantor, encore!") Construire une application bijective

$$C_3 : \mathbb{N}^3 \simeq \mathbb{N}$$

qui est "polynomiale", c'est a dire qu'il existe une fonction polynomiale en trois variables a coefficients rationels,

$$P(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k \geqslant 0} \sum a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$$

(avec $a_{i,j,k}$ des nombres rationels) telle que

$$\forall (l, m, n) \in \mathbb{N}^3,\ C_3((l, m, n)) = P(l, m, n).$$

Pour ce faire on pourra utiliser le fait que l'on connait (Feuille 1) une application polynomiale bijective

$$C_2 : \mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$$

et le fait (associativite du produit cartesien, admis) que

$$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}.$$

Solution. On définit

$$C_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (l, m, n) & \longmapsto & C_2(C_2(l, m), n) \end{array}.$$

On remarque que C_3 est la composition

$$\mathbb{N}^3 \cong \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \xrightarrow{\quad C_2\times \mathrm{Id} \quad} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\quad C_2 \quad} \mathbb{N}\ ,$$

où $(C_2 \times \mathrm{Id})((l,m),n) = (C_2(l,m),n)$. Cette application est bijective puisque C_2 et Id le sont (vérifiez le). En particulier, C_3 est la composition d'application bijectives, elle est donc elle-même bijective.
En utilisant la définition de C_2, on voit que

$$C_3(l,m,n) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(l+m)^2+l+3m}{2}+n\right)^2 + \frac{(l+m)^2+l+3m}{2}+3n\right),$$

qui est bien polynomiale en l,m,n.

Exercice 5. Pour x un nombre rationel on note $\lfloor x \rfloor$ la fonction "plancher" de x, ie. le plus grand entier inferieur ou equal a x.

Montrer que l'application

$$(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto m + (n + \lfloor (m+1)/2 \rfloor)^2 \in \mathbb{N}$$

et une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Solution. Avant de résoudre l'exercice, on se rappelle de la construction de l'application de Cantor de la semaine passée. Une des étapes clé de la preuve consistait à décomposer $\mathbb{N}$ comme une union disjointe d'intervalles d'entier le long de la suite $c_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut généraliser l'argument de la manière suivante :

Proposition. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \subseteq \mathbb{N}$ une suite strictement croissante d'entiers avec $a_0 = 0$. Alors

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{n\geqslant 0} [a_n, a_{n+1}-1]_{\mathbb{N}}.$$

Ici pour $n < m$, $[n,m]_{\mathbb{N}}$ désigne l'intervalle d'entiers $n \leqslant l < m$. La notation $\sqcup$, "l'union disjointe", veut dire qu'on prend l'union sur des sous-ensembles disjoints de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que toutes les intersections sont vides).

Démonstration. Comme a_n est une suite d'entiers strictement croissante, et $a_0 = 0$, on a que $a_n \geqslant n$. En particulier, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Cela implique que pour tous $y \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant 0$ avec $y < a_n$. Si l'on prend un tel n minimal, alors on a forcément $a_{n-1} \leqslant y < a_n$, c'est-à-dire $y \in [a_{n-1}, a_n]_{\mathbb{N}}$. On vient de montrer que

$$\mathbb{N} \subseteq \cup_{n\geqslant 0}[a_n, a_{n+1}-1]_{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}.$$

Le fait que l'union est disjointe est clair par croissance stricte de la suite. □

Pour résoudre l'exercice, on utilise la proposition précédente avec la suite $a_n = n^2$. On montre d'abord la surjectivité.
Par la proposition, on en déduit que pour tout entier $y \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x \in \mathbb{N}$ avec $y \in [x^2, (x+1)^2 - 1]_{\mathbb{N}}$. Cela revient à dire qu'il existe une unique manière d'écrire $y = m + x^2$ avec $0 \leqslant m \leqslant (x+1)^2 - 1 - x^2 = 2x$. En particulier :

$$0 \leqslant \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor = x.$$

On pose $n := x - \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$, qui est un entier positif par l'équation ci-dessus. Alors on a

$$y = m + x^2 = m + \left(n + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \right)^2,$$

ce qui montre la surjectivité.
Pour l'injectivité, soit $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec

$$y := m_1 + \left(n_1 + \left\lfloor \frac{m_1+1}{2} \right\rfloor \right)^2 = m_2 + \left(n_2 + \left\lfloor \frac{m_2+1}{2} \right\rfloor \right)^2.$$

On pose

$$x_i := n_i + \left\lfloor \frac{m_i+1}{2} \right\rfloor$$

pour $i = 1, 2$. Le point clé est qu'on a toujours l'inégalité

$$0 \leqslant m_i \leqslant 2 \left\lfloor \frac{m_i+1}{2} \right\rfloor \leqslant 2 \left\lfloor \frac{m_i+1}{2} \right\rfloor + 2n_i = 2x_i.$$

Pour justifier la deuxième inégalité, on peut remarquer que pour $a \in \mathbb{N}$:

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} a/2 & a \text{ est pair} \\ (a+1)/2 & a \text{ est impair} \end{cases},$$

et faire une disjonction de cas. D'un autre côté, on sait par la proposition que y ne peut s'écrire que d'une unique manière comme $m + x^2$ avec $0 \leqslant m \leqslant 2x$. Cela force $m_1 = m_2$ et $x_1 = x_2$, ce qui implique $n_1 = n_2$ également.
On en déduit que notre application définit bien une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Pour les curieux : l'application inverse est donnée par

$$y \mapsto \left(y - \lfloor \sqrt{y} \rfloor^2, \lfloor \sqrt{y} \rfloor - \left\lfloor \frac{y - \lfloor \sqrt{y} \rfloor^2 + 1}{2} \right\rfloor \right)$$

Sauriez-vous expliquer pourquoi ?